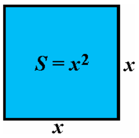
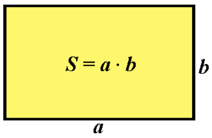
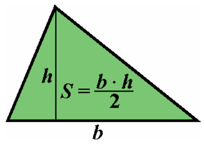
Unidad didáctica 4

EXPRESIONES ALGEBRAICAS. POLINOMIOS

1. Expresiones algebraicas.







Estas expresiones del área son *expresiones algebraicas,* ya que además de números aparecen letras. Son también expresiones algebraicas:

$$3bac, \quad 5x^2ty + 2xy, \quad 7\sqrt{xy} + z^3, \quad \frac{x^2 - 3y}{a+b}$$

> Llamamos ***expresión algebraica*** a toda combinación de letras y números ligados por los signos de las operaciones aritméticas. Cada una de las letras se llama ***variable.***

Al escribir expresiones algebraicas se debe tener en cuenta lo siguiente:

- El signo de multiplicación (×, ·) no suele ponerse entre los números y las letras, ni entre las letras.

  $21 \cdot a^2 \cdot y^3$ se escribe ordinariamente así: $21a^2y^3$

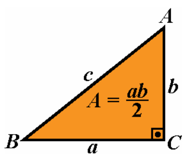
- El signo + o − que precede a una letra es un signo de operación; no indica que el valor que toma la letra sea positivo o negativo.
- Si el uno actúa como factor, divisor o exponente, se escribe el resultado.

  $1 \cdot a^3b$, $\dfrac{a^2x^3}{1}$, $3x^1b^4$, operando se escriben así: a^3b, a^2x^3, $3xb^4$

> Las letras ***a, b, c, …, x, y, z*** representan números; cuando operamos con ellas es como si operásemos con los números que representan y cumplen idénticas reglas.

1.1. Valor numérico de una expresión algebraica.

El área del triángulo rectángulo *ABC* es: $A = \dfrac{ab}{2}$



Para hallar el área de un triángulo concreto, por ejemplo, de uno cuyos catetos sean $a = 6$ cm y $b = 8$ cm, se sustituyen en la fórmula las letras *a* y *b* por los números 6 y 8.

Por tanto: $A = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$, $\quad A = 24 \text{ cm}^2$

El número 24 es el *valor numérico* de la expresión $\dfrac{ab}{2}$ cuando se sustituye *a* por 6 y *b* por 8.

> Llamamos ***valor numérico*** de una expresión algebraica, para unos valores fijos de las variables, al resultado obtenido al sustituir las variables por estos valores fijos y efectuar las operaciones indicadas.

EJERCICIOS

1. Asocia cada expresión algebraica con su enunciado correspondiente.

a) $x^2 - y^2$	1) El triple de la suma de un número más cuatro.
b) $3x + 4$	2) Suma de tres números pares consecutivos.
c) $10x + y$	3) La diferencia de los cuadrados de dos números.
d) $2x + (2x + 2) + (2x + 4)$	4) Un número de dos cifras.
e) $(x - y)^2$	5) Suma de tres números impares consecutivos.
f) $3(x + 4)$	6) El cuadrado de la diferencia de dos números.
g) $(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5)$	7) El triple de un número más cuatro.

2. Llama x e y a dos números cualesquiera y expresa con ellos cada uno de los siguientes enunciados.
   a) La suma de x y el triple de y.
   b) La diferencia del doble de x menos la mitad de y.
   c) La quinta parte de x es igual que el doble de y menos 4.
   d) El cuadrado de su suma.
   e) El cuadrado de su diferencia.
   f) La suma de sus cuadrados.
   g) La diferencia de sus cuadrados.

3. Determina los valores numéricos de las expresiones siguientes para los valores de las variables que se indican.
   a) $a^2 - b^2$; $a = 1, b = -1$ b) $\frac{x}{2} + y + z^2$; $x = -4, y = 2, z = -2$
   c) $\frac{2x^2 + xy - 1}{2x + y}$; $x = -1, y = 4$ d) $2^a + \sqrt{4bc}$; $a = -1, b = 2, c = 18$

2. MONOMIOS.

Un ***monomio*** es una expresión algebraica formada por el producto de un factor numérico, ***a***, y un factor que es la variable elevada a un exponente natural, $\boldsymbol{x^n}$**:** $\boldsymbol{ax^n}$**.**

- El factor numérico ***a*** se llama ***coeficiente*** del monomio.
- La variable ***x*** recibe también el nombre de ***indeterminada.***
- El exponente natural ***n*** de la variable se llama ***grado*** del monomio.
- La variable con su respectivo exponente, $\boldsymbol{x^n}$**,** se llama ***parte literal.***

Dos monomios que tienen la misma parte literal, $\boldsymbol{ax^n}$ y $\boldsymbol{bx^n}$**,** reciben el nombre de ***monomios semejantes.***

Ejemplo. Las expresiones algebraicas x^2, $\frac{3}{5}x^2$ y $8x^3$ son monomios.

De éstos, x^2 y $\frac{3}{5}x^2$ son monomios semejantes.

EJERCICIOS

4. Escribe un monomio en la indeterminada x que verifique las condiciones que se expresan en cada uno de los siguientes casos.
   a) De grado 2 y coeficiente –4.
   b) De grado cero y coeficiente 1.
   c) Semejante a $4x^3$ y de coeficiente 3.
   d) De grado 3 y coeficiente 1/3.

2.1. Operaciones con monomios: suma, resta, producto, cociente y potencia.

Dados dos monomios, en general, no pueden sumarse o restarse, en el sentido de que su suma o diferencia sea otro monomio. Para que esto sea posible tienen que ser monomios semejantes.

La **suma** o **diferencia** de monomios semejantes es otro monomio semejante, cuyo coeficiente es la suma o diferencia de los coeficientes.

$$\boldsymbol{ax^n \pm bx^n = (a \pm b)\, x^n}$$

El **producto** de monomios cualesquiera es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y cuya parte literal es el producto de las partes literales, luego su grado es la suma de los grados.

$$ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)(x^n \cdot x^m) = (a \cdot b)\, x^{n+m} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)\, x^{n+m}}$$

El **cociente** de dos monomios, cuyo dividendo tiene grado mayor o igual que el del divisor, es otro monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes y cuya parte literal es el cociente de las partes literales, luego su grado es la diferencia de los grados.

$$ax^n : bx^m = (a : b)(x^n : x^m) = (a : b)\, x^{n-m} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{ax^n : bx^m = (a : b)\, x^{n-m}} \text{ con } \boldsymbol{n \geq m}$$

La **potencia** de exponente un número natural *m* de un monomio es otro monomio cuyo coeficiente es la potencia de exponente *m* del coeficiente y cuya parte literal es la potencia exponente *m* de la parte literal, luego su grado es el producto de su grado por *m*.

$$(ax^n)^m = a^m (x^n)^m = a^m x^{n \cdot m} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{(ax^n)^m = a^m x^{n \cdot m}}$$

Ejemplo.

$8x^4 + 2x^4 - 7x^4 = (8 + 2 - 7)x^4 = 3x^4$

$7x^3 \cdot 5x^6 = (7 \cdot 5)(x^3 \cdot x^6) = 35x^{3+6} = 35x^9$

$14x^7 : 2x^4 = (14 : 2)(x^7 : x^4) = 7x^{7-4} = 7x^3$

$(2x^2)^3 = 2^3(x^2)^3 = 8x^{2 \cdot 3} = 8x^6$

EJERCICIOS

5. Calcula las siguientes sumas y restas de monomios semejantes.
   a) $3x^2 - 6x^2 + 9x^2$ b) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x$ c) $3x^2 - (-5x^2)$ d) $\frac{1}{2}x^2 + x^2 - \frac{1}{3}x^2$
6. Haz los siguientes productos e indica el grado del resultado.
   a) $2x(-x^3)$ b) $-\frac{1}{4}x\left(-\frac{1}{4}x^3\right)x^2$ c) $5x\left(-\frac{1}{3}x^3\right)6x$ d) $\left(-\frac{1}{4}x\right)\left(-\frac{1}{4}x^3\right)x^2$
7. Halla los siguientes cocientes.
   a) $25x^5 : (-5x^2)$ b) $\frac{3}{5}x^6 : \frac{2}{4}x$ c) $\frac{3}{2}x^3 : 3x^2$ d) $\left(-\frac{1}{2}x^3\right) : \left(-\frac{1}{4}x^3\right)$
8. Realiza las siguientes potencias de monomios.
   a) $(x^2)^2$ b) $(2x)^3$ c) $(-2x)^3$ d) $(5x^2)^4$ e) $(-5x^2)^4$ f) $(3x^5)^3$

3. POLINOMIOS.

Cuando queremos sumar o restar monomios no semejantes, no podemos realizar dichas operaciones y debemos dejar el resultado indicado. A estas sumas o diferencias de monomios las llamamos *polinomios.*

Así, por ejemplo, tenemos el polinomio $9x^3 + 8x^2 + 6x + 12 + x^3 - x - 7x^2 - 10x^3$. Como vemos, un polinomio puede tener monomios semejantes, pero si sumamos todos los monomios semejantes se obtiene el polinomio $x^2 + 5x + 12$, que es la *forma reducida* del polinomio dado.

Un ***polinomio en la indeterminada x*** es una expresión algebraica formada por la suma o diferencia de dos o más monomios en la misma indeterminada.

- ***Término*** de un polinomio es cada uno de los monomios que lo forman. Al monomio de grado cero se le llama ***término independiente*** del polinomio. Así, *binomio* es un polinomio de dos términos y *trinomio* un polinomio de tres términos, en los demás casos se dice un polinomio de tantos términos.
- El ***grado*** de un polinomio es el mayor de los grados de los términos que lo forman.
- Un polinomio es ***completo*** cuando tiene todos los términos desde el término de grado cero hasta el término de mayor grado.
- Un polinomio está ***ordenado*** cuando los grados de los términos van creciendo o decreciendo. Normalmente se ordenan los grados de mayor a menor.

Los polinomios se designan por $A(x)$, $B(x)$, etc. indicando entre paréntesis la indeterminada. Así, son polinomios las siguientes expresiones:

Polinomio	Nº de términos	Término indep.	Grado	Completo	Ordenado
$A(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 1$	4	-1	4	No	Sí
$B(x) = 2 - 5x^2 + 4x$	3 (trinomio)	2	2	Sí	No
$C(x) = 3x - 7$	2 (binomio)	-7	1	Sí	Sí

3.1. Valor numérico de un polinomio.

Valor numérico de un polinomio $\boldsymbol{P(x)}$ para un valor de la indeterminada $\boldsymbol{x = a}$, es el resultado obtenido de sustituir x por a y efectuar las operaciones indicadas. Lo denotamos por $\boldsymbol{P(a)}$.

Ejemplo. El valor numérico del polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$ para $x = 7$ es $P(7) = 2 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 4 = 837$

Obsérvese que el valor numérico de cualquier polinomio para $x = 0$ es su término independiente. Así, por ejemplo:

$$P(0) = 2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

EJERCICIOS

9. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios, para los valores que se indican.

a) $P(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$ para $x = 0$, $x = 1$ y $x = -2$

b) $Q(x) = 3x^3 - 6x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ para $x = 0$, $x = -1$ y $x = 1/2$

3.2. Operaciones con polinomios: suma, resta, producto y potencia.

- La **suma** o **diferencia** de polinomios se reduce a sumar o restar sus monomios semejantes.

  Dados los polinomios A(x) = $x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ y B(x) = $-x^4 + 8x^2 + 7x + 2$, calculamos A(x) + B(x) poniendo uno debajo del otro de modo que queden en columna los monomios semejantes; después, los sumamos:

$$\begin{array}{rl} \mathrm{A}(x) = & \quad\;\; x^3 - 2x^2 - 7x - 4 \\ \mathrm{B}(x) = -x^4 & \qquad\quad + 8x^2 + 7x + 2 \\ \hline \mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(x) = -x^4 & + x^3 + 6x^2 \qquad\quad - 2 \end{array}$$

  Para restar dos polinomios se suma al polinomio minuendo el polinomio opuesto del sustraendo.

  Polinomio opuesto de uno dado es el que tiene las mismas partes literales y los respectivos coeficientes opuestos a los del dado. Si B(x) = $-x^4 + 8x^2 + 7x + 2$, su polinomio opuesto es $-$B(x) = $x^4 - 8x^2 - 7x - 2$.

  Análogamente calculamos A(x) − B(x) = A(x) + [−B(x)]:

$$\begin{array}{rl} \mathrm{A}(x) = & \quad\;\; x^3 - 2x^2 - 7x - 4 \\ -\mathrm{B}(x) = x^4 & \qquad\quad - 8x^2 - 7x - 2 \\ \hline \mathrm{A}(x)-\mathrm{B}(x) = x^4 & + x^3 - 10x^2 - 14x - 6 \end{array}$$

  En la práctica, es más cómodo reducir términos semejantes. Para ello basta aplicar la regla de los signos de la suma y la suma o diferencia de monomios semejantes. Lo primero que se hace es quitar paréntesis; si va precedido del signo más, se conservan los signos de los términos del polinomio, y si va precedido del signo menos, se cambian los signos de los términos del polinomio.

  Hallamos de nuevo A(x) + B(x) y A(x) − B(x) de esta forma:

$$(x^3 - 2x^2 - 7x - 4) + (-x^4 + 8x^2 + 7x + 2) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4 - x^4 + 8x^2 + 7x + 2 = -x^4 + x^3 + 6x^2 - 2$$

$$(x^3 - 2x^2 - 7x - 4) - (-x^4 + 8x^2 + 7x + 2) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4 + x^4 - 8x^2 - 7x - 2 = x^4 + x^3 - 10x^2 - 14x - 6$$

- Para **multiplicar** dos polinomios se multiplican todos los monomios del primero por cada uno de los del segundo, o viceversa, y se reducen los términos semejantes.

  Dados los polinomios A(x) = $x^3 + 2x^2 - x + 2$ y B(x) = $4x - 2$, calculamos A(x) · B(x):

$$\begin{array}{rr} \mathrm{A}(x) = & x^3 + 2x^2 - x + 2 \\ \times\;\; \mathrm{B}(x) = & 4x - 2 \\ \hline & -2x^3 - 4x^2 + 2x - 4 \\ & 4x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 8x \quad\;\; \\ \hline \mathrm{A}(x)\cdot\mathrm{B}(x) = & 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 10x - 4 \end{array}$$

  El producto de polinomios se basa en la propiedad distributiva y en el producto de monomios. En la práctica, se hace así:

$$(x^3 + 2x^2 - x + 2) \cdot (4x - 2) = x^3(4x - 2) + 2x^2(4x - 2) - x(4x - 2) + 2(4x - 2) =$$
$$= 4x^4 - 2x^3 + 8x^3 - 4x^2 - 4x^2 + 2x + 8x - 4 = 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 10x - 4$$

- La **potencia,** $[A(x)]^n$**,** de base un **polinomio** $A(x)$ y exponente un **número natural** n se define por:

$$[A(x)]^n = \overbrace{A(x) \times A(x) \times \cdots \times A(x)}^{(n \text{ veces})}$$

  Dado el polinomio A(x) = $2x - 3$, calculamos $[\mathrm{A}(x)]^3$:

$$[\mathrm{A}(x)]^3 = \mathrm{A}(x) \cdot \mathrm{A}(x) \cdot \mathrm{A}(x) = [\mathrm{A}(x) \cdot \mathrm{A}(x)] \cdot \mathrm{A}(x) = [(2x - 3) \cdot (2x - 3)] \cdot (2x - 3) = (4x^2 - 12x + 9) \cdot (2x - 3) =$$
$$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

EJERCICIOS

10. Dados los polinomios $A(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 1$, $B(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x$ y $C(x) = -x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, realiza las siguientes operaciones.
    a) $A(x) - [B(x) + C(x)]$ b) $A(x) - B(x) + C(x)$ c) $A(x) - B(x) - C(x)$

11. Considera los polinomios $A(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ y $B(x) = -x^4 + 8x^2 + 7x + 2$.
    a) Calcula la diferencia $C(x) = A(x) - B(x)$.
    b) Comprueba que $A(x) = B(x) + C(x)$.
    c) Halla los valores numéricos A(3), B(3) y C(3) y comprueba que C(3) = A(3) − B(3).

12. Realiza las siguientes multiplicaciones con polinomios.
    a) $(x^2 - 3x + 1)(x + 4)$ b) $(5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x)(2x^3 + 2x + 1)$
    c) $(x^4 - 7x^2 - 3)(x^2 - 3)$ d) $(2x^2 - 4x + 16)(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$

13. Desarrolla las siguientes potencias.
    a) $(3x - 1)^2$ b) $(x + 1)^3$ c) $(-2x + 3)^3$ d) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right)^2$

4. IGUALDADES NOTABLES.

Las fórmulas o igualdades que vamos a obtener a continuación referidas a binomios son muy importantes, por lo que debemos memorizarlas. Las figuras geométricas dan una interpretación comparando las áreas de las regiones que se forman.

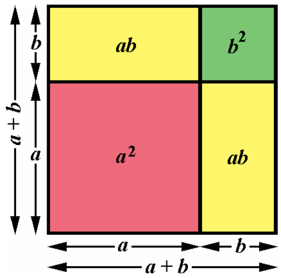
- **Cuadrado de una suma**

El lado del cuadrado es $a + b$.

Se forman dos cuadrados pequeños de superficie a^2 y b^2 y dos rectángulos de superficie ab.

La superficie del cuadrado grande es igual a la suma de las superficies de los cuadrados pequeños y de los rectángulos.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Mediante la potenciación también podríamos haber obtenido esta expresión:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El **cuadrado de la suma** de dos monomios es igual al cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo. $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

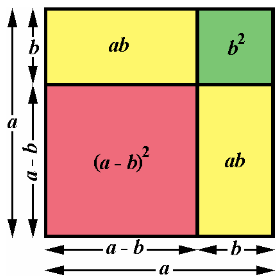
- **Cuadrado de una diferencia**

El lado del cuadrado es a.

Se forman dos cuadrados pequeños de superficie $(a - b)^2$ y b^2 y dos rectángulos de superficie ab. Observa que b^2 está en los dos rectángulos ab.

La superficie del cuadrado de lado $(a - b)$ es igual a la superficie del cuadrado grande menos la superficie sombreada.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



Operando obtenemos la misma expresión:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a(a-b)-b(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$$

El **cuadrado de la diferencia** de dos monomios es igual al cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

- **Suma por diferencia o diferencia de cuadrados**

Mediante el producto obtenemos:

$$(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$$

La **suma de dos monomios por su diferencia** es igual a la diferencia de sus cuadrados.

$$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

Ejemplo. En las operaciones con polinomios resultan muy útiles las igualdades notables, así por ejemplo:

$$(2x+3)^2=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2=4x^2+12x+9$$

$$(2x-3)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2=4x^2-12x+9$$

$$(2x+3)(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$$

EJERCICIOS

14. Desarrolla los siguientes cuadrados.

a) $(x+8)^2$ b) $(3x+8)^2$ c) $(4-3x)^2$ d) $(2x-6)^2$

e) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ f) $\left(\frac{1}{2}x+8\right)^2$ g) $\left(\frac{4}{3}-3x\right)^2$ h) $\left(3x^3-\frac{1}{3}\right)^2$

15. Expresa como el cuadrado de una suma o el cuadrado de una diferencia cada uno de los siguientes polinomios.

a) $x^2+10x+25$ b) $4x^2+4x+1$ c) $x^2-20x+100$ d) x^2+6x+9

e) $x^2+36-12x$ f) $4x^2+9-12x$ g) x^4-20x^2+100 h) x^4+6x^2+9

16. Expresa como una diferencia cada uno de los siguientes productos.

a) $(x-5)(x+5)$ b) $(5-x)(5+x)$ c) $(2x-5)(2x+5)$

d) $(5-2x)(5+2x)$ e) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$ f) $\left(\frac{1}{3}x+3\right)\left(\frac{1}{3}x-3\right)$

17. Desarrolla el cubo de la suma y de la diferencia de dos monomios: $(a+b)^3$ y $(a-b)^3$.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Asocia cada expresión algebraica con su enunciado correspondiente.

a) $x^2 - y^2$
b) $3x + 4$
c) $10x + y$
d) $2x + (2x + 2) + (2x + 4)$
e) $(x - y)^2$
f) $3(x + 4)$
g) $(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5)$

1) El triple de la suma de un número más cuatro.
2) Suma de tres números pares consecutivos.
3) La diferencia de los cuadrados de dos números.
4) Un número de dos cifras.
5) Suma de tres números impares consecutivos.
6) El cuadrado de la diferencia de dos números.
7) El triple de un número más cuatro.

1f, 2d, 3a, 4c, 5g, 6e, 7b

2. Llama x e y a dos números cualesquiera y expresa con ellos cada uno de los siguientes enunciados.

a) La suma de x y el triple de y. $\boldsymbol{x + 3y}$
b) La diferencia del doble de x menos la mitad de y. $\boldsymbol{2x - y/2}$
c) La quinta parte de x es igual que el doble de y menos 4. $\boldsymbol{x/5 = 2y - 4}$
d) El cuadrado de su suma. $\boldsymbol{(x + y)^2}$
e) El cuadrado de su diferencia. $\boldsymbol{(x - y)^2}$
f) La suma de sus cuadrados. $\boldsymbol{x^2 + y^2}$
g) La diferencia de sus cuadrados. $\boldsymbol{x^2 - y^2}$

3. Determina los valores numéricos de las expresiones siguientes para los valores de las variables que se indican.

a) $a^2 - b^2$; $a = 1, b = -1$ b) $\frac{x}{2} + y + z^2$; $x = -4, y = 2, z = -2$

c) $\frac{2x^2 + xy - 1}{2x + y}$; $x = -1, y = 4$ d) $2^a + \sqrt{4bc}$; $a = -1, b = 2, c = 18$

a) 0 b) 4 c) -3/2 d) 25/2

4. Escribe un monomio en la indeterminada x que verifique las condiciones que se expresan en cada uno de los siguientes casos.

a) De grado 2 y coeficiente –4. $\boldsymbol{-4x^2}$
b) De grado cero y coeficiente 1. **1**
c) Semejante a $4x^3$ y de coeficiente 3. $\boldsymbol{3x^3}$
d) De grado 3 y coeficiente 1/3. $\boldsymbol{1/3x^3}$

5. Calcula las siguientes sumas y restas de monomios semejantes.

a) $3x^2 - 6x^2 + 9x^2 = \boldsymbol{6x^2}$ b) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x = \boldsymbol{\frac{5}{4}x}$ c) $3x^2 - (-5x^2) = \boldsymbol{8x^2}$ d) $\frac{1}{2}x^2 + x^2 - \frac{1}{3}x^2 = \boldsymbol{\frac{7}{6}x^2}$

6. Haz los siguientes productos de e indica el grado del resultado.

a) $2x(-x^3) = \boldsymbol{-2x^4}$ b) $-\frac{1}{4}x\left(-\frac{1}{4}x^3\right)x^2 = \boldsymbol{\frac{1}{16}x^6}$ c) $5x\left(-\frac{1}{3}x^3\right)6x = \boldsymbol{-10x^5}$ d) $\left(-\frac{1}{4}x\right)\left(-\frac{1}{4}x^3\right)x^2 = \boldsymbol{\frac{1}{16}x^6}$

7. Halla los siguientes cocientes.

a) $25x^5 : (-5x^2) = \boldsymbol{-5x^3}$ b) $\frac{3}{5}x^6 : \frac{2}{4}x = \boldsymbol{\frac{6}{5}x^5}$ c) $\frac{3}{2}x^3 : 3x^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}x}$ d) $\left(-\frac{1}{2}x^3\right) : \left(-\frac{1}{4}x^3\right) = \mathbf{2}$

8. Realiza las siguientes potencias de monomios.

a) $(x^2)^2 = \boldsymbol{x^4}$ b) $(2x)^3 = \boldsymbol{8x^3}$ c) $(-2x)^3 = \boldsymbol{-8x^3}$ d) $(5x^2)^4 = \boldsymbol{625x^8}$ e) $(-5x^2)^4 = \boldsymbol{625x^8}$ f) $(3x^5)^3 = \boldsymbol{27x^{15}}$

9. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios, para los valores que se indican.

a) $P(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$ para $x = 0, x = 1$ y $x = -2$ **P(0) = 12, P(1) = 0, P(-2) = -18**

b) $Q(x) = 3x^3 - 6x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ para $x = 0, x = -1$ y $x = 1/2$ **Q(0) = 3/2, Q(-1) = -27/4, Q(1/2) = 0**

10. Dados los polinomios $A(x) = 3x^4 + 2x^2 - x + 1$, $B(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - x$ y $C(x) = -x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, realiza las siguientes operaciones.

a) $A(x) - [B(x) + C(x)]$ b) $A(x) - B(x) + C(x)$ c) $A(x) - B(x) - C(x)$

a) $\boldsymbol{2x^4 + 2x^2 - x + 2}$ **b)** $\boldsymbol{2x^3 + x}$ **c)** $\boldsymbol{2x^4 + 2x^2 - x + 2}$

11. Considera los polinomios $A(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ y $B(x) = -x^4 + 8x^2 + 7x + 2$.
   a) Calcula la diferencia $C(x) = A(x) - B(x)$.
   b) Comprueba que $A(x) = B(x) + C(x)$.
   c) Halla los valores numéricos A(3), B(3) y C(3) y comprueba que C(3) = A(3) − B(3).
   a) $C(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 - 14x - 6$
   b) Se deja para el alumno.
   c) A(3) = -16, B(3) = 14, C(3) = -30; la comprobación se deja para el alumno.

12. Realiza las siguientes multiplicaciones con polinomios.
   a) $(x^2 - 3x + 1)(x + 4)$ b) $(5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x)(2x^3 + 2x + 1)$
   c) $(x^4 - 7x^2 - 3)(x^2 - 3)$ d) $(2x^2 - 4x + 16)(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$
   a) $x^3 + x^2 - 11x + 4$ **b) $10x^7 + 6x^6 + 6x^5 + 5x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x$**
   c) $x^6 - 10x^4 + 18x^2 + 9$ **d) $x^3 - x^2 + 6x + 8$**

13. Desarrolla las siguientes potencias.
   a) $(3x - 1)^2 = \mathbf{9x^2 - 6x + 1}$ b) $(x + 1)^3 = \mathbf{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$
   c) $(-2x + 3)^3 = \mathbf{-8x^3 + 36x^2 - 54x + 27}$ d) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}}$

14. Desarrolla los siguientes cuadrados.
   a) $(x + 8)^2$ b) $(3x + 8)^2$ c) $(4 - 3x)^2$ d) $(2x - 6)^2$
   e) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ f) $\left(\frac{1}{2}x + 8\right)^2$ g) $\left(\frac{4}{3} - 3x\right)^2$ h) $\left(3x^3 - \frac{1}{3}\right)^2$
   a) $x^2 + 16x + 64$ **b) $9x^2 + 48x + 64$** **c) $16 - 24x + 9x^2$** **d) $4x^2 - 24x + 36$**
   e) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ **f) $\frac{1}{4}x^2 + 8x + 64$** **g) $\frac{16}{9} - 8x + 9x^2$** **h) $9x^6 - 2x^3 + \frac{1}{9}$**

15. Expresa como el cuadrado de una suma o el cuadrado de una diferencia cada uno de los siguientes polinomios.
   a) $x^2 + 10x + 25$ b) $4x^2 + 4x + 1$ c) $x^2 - 20x + 100$ d) $x^2 + 6x + 9$
   e) $x^2 + 36 - 12x$ f) $4x^2 + 9 - 12x$ g) $x^4 - 20x^2 + 100$ h) $x^4 + 6x^2 + 9$
   a) $(x + 5)^2$ **b) $(2x + 1)^2$** **c) $(x - 10)^2$** **d) $(x + 3)^2$**
   e) $(x - 6)^2$ **f) $(2x - 3)^2$** **g) $(x^2 - 10)^2$** **h) $(x^2 + 3)^2$**

16. Expresa como una diferencia cada uno de los siguientes productos.
   a) $(x - 5)(x + 5)$ b) $(5 - x)(5 + x)$ c) $(2x - 5)(2x + 5)$
   d) $(5 - 2x)(5 + 2x)$ e) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$ f) $\left(\frac{1}{3}x + 3\right)\left(\frac{1}{3}x - 3\right)$
   a) $x^2 - 25$ **b) $25 - x^2$** **c) $4x^2 - 25$**
   d) $25 - 4x^2$ **e) $x^2 - \frac{1}{9}$** **f) $\frac{1}{9}x^2 - 9$**

17. Desarrolla el cubo de la suma y de la diferencia de dos monomios: $(a + b)^3$ y $(a - b)^3$.
   $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
   $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$