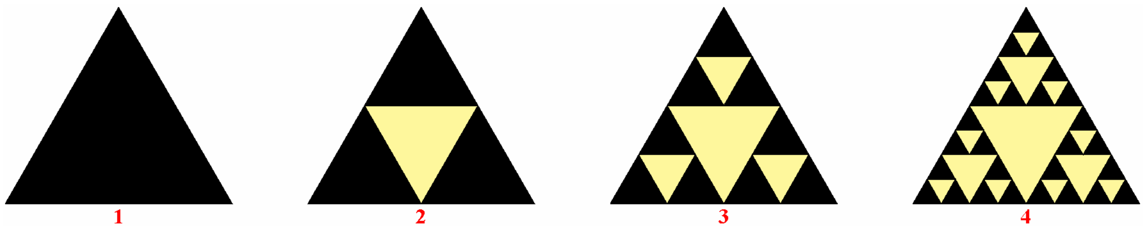
Unidad didáctica 3

SUCESIONES DE NÚMEROS REALES. PROGRESIONES

1. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES. TÉRMINO GENERAL

En las siguientes figuras observa el proceso que lleva a la creación de nuevos triángulos negros.



Siguiendo con el proceso, *¿cuántos triángulos negros tendrá la figura 5?* Y, en general, *¿la figura n?*

Figura	Nº de triángulos
1	$1 = 3^0$
2	$3 = 3^1$
3	$9 = 3^2$
4	$27 = 3^3$
5	$81 = 3^4$

En la figura enésima, el número de triángulos negros es 3^{n-1}. Así, por ejemplo, a partir de la fórmula anterior podemos afirmar que en la figura 10 se obtendrán $3^{10-1} = 3^9 = 19.683$ triángulos negros.

La secuencia ordenada de números que hemos obtenido en la tabla anterior 1, 3, 9, 27, 81, 243, … es una *sucesión de números reales* y a la expresión $a_n = 3^{n-1}$ se le llama *término general*.

- Una ***sucesión de números reales*** $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ es una secuencia ordenada de infinitos números reales.
- Cada uno de los números de la misma ($a_1, a_2, a_3, \ldots$) se denomina ***término*** de la sucesión.
- Los números naturales 1, 2, 3, … se llaman ***índices,*** e indican el lugar que ocupa el término en la sucesión. A cada número natural (*índice*) se le hace corresponder un número real (*término*).
- Al término a_n se le llama ***término n-ésimo*** o ***término general***, y es la expresión que permite conocer el valor de un determinado término si se conoce previamente el lugar que ocupa en la misma.
- Se acostumbra representar la sucesión por el conjunto ordenado de sus términos, con o sin paréntesis, o bien por su término general.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots \quad \text{o bien} \quad (a_n),\ n \in \mathbf{N}$$

Ejemplo.- Halla el término general de las siguientes sucesiones.

a) El conjunto ordenado de los números impares. b) 0, 3, 8, 15, 24, 35, …

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ d) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

a) $a_n = 2n - 1$ b) $b_n = n^2 - 1$ c) $c_n = \dfrac{1}{n+1}$ d) $d_n = \dfrac{n-1}{n}$

Ejemplo.- Escribir los seis primeros términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

$$a_1 = 3 \cdot 2^{1-1} = 3 \cdot 2^0 = 3 \cdot 1 = 3 \qquad a_4 = 3 \cdot 2^{4-1} = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$$
$$a_2 = 3 \cdot 2^{2-1} = 3 \cdot 2^1 = 3 \cdot 2 = 6 \qquad a_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$$
$$a_3 = 3 \cdot 2^{3-1} = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12 \qquad a_6 = 3 \cdot 2^{6-1} = 3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$$

La obtención del término general de una sucesión puede entrañar una notable dificultad. No obstante, se estudiará más adelante dos clases de tipos de sucesiones particulares en las que el hallazgo del término general es sencillo.

EJERCICIOS

1. Escribe los términos primero, segundo, tercero, décimo y vigésimo de las sucesiones dadas por los términos generales siguientes.

   a) $a_n = -3n + 5$ b) $b_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$ c) $c_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1}$

2. Halla el término general de las siguientes sucesiones.

   a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, … b) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, … c) 1, 8, 27, 64, 125, …

   d) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, \dfrac{16}{81}, \dfrac{32}{243}, \ldots$ e) $4, \dfrac{9}{2}, \dfrac{16}{3}, \dfrac{25}{4}, \ldots$ f) $\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{9}{8}, 1, \dfrac{25}{32}, \ldots$

2. SUCESIONES DEFINIDAS POR RECURRENCIA

- Considera la sucesión de los números impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, … . Ya vimos que esta sucesión puede ser definida dando su término general $a_n = 2n - 1$. Sin embargo lo primero que, probablemente, observamos de esta sucesión es que cada término se obtiene sumando 2 unidades al anterior. Visto así, una sucesión como ésta queda definida si conocemos el primer término y la regla que nos permite obtener, a partir de él, los que le siguen.

Ejemplo: Escribe la sucesión que tiene como primer término 2 y en la que cada nuevo término se obtiene multiplicando por 3 al anterior.

La sucesión pedida sería: 2, 6, 18, 54... y la manera simbólica de expresar su comportamiento sería: $a_n = a_{n-1} + 2$

Decimos que una sucesión está **definida por recurrencia** cuando cada término se obtiene a partir de los anteriores.

La sucesión recurrente más célebre es la **Sucesión de Fibonacci**

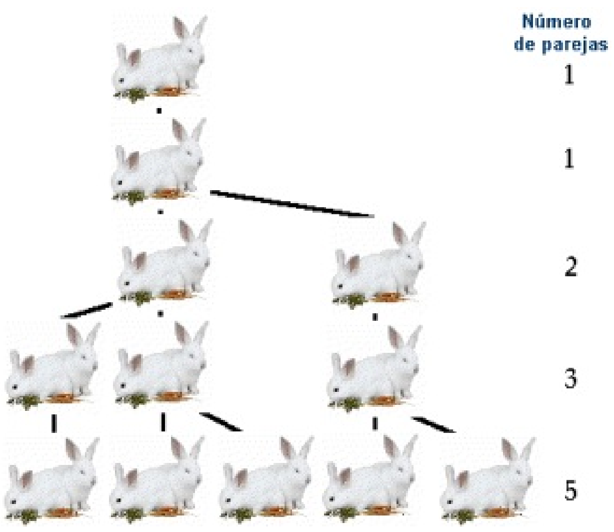
Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, se plantea el siguiente problema: si dejamos en una isla a una pareja de conejos jóvenes, que serán fértiles en un mes y tendrán otra pareja en un mes más que a su vez será fértil en un mes, etc ¿cuántas parejas de conejos hay en la isla en cada mes?

La sucesión es la siguiente: 1, 1, 2, 3, 5, 8...

Observa que la ley que sigue es recurrente. Cada término es la suma de los dos anteriores : $\mathbf{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$

Este problema, que únicamente constituía un reto intelectual para Fibonacci, nos proporciona una original ley de recurrencia que describe algunas regularidades observadas en la naturaleza. Los términos de esta sucesión suelen encontrarse en los pétalos de las flores, en las espirales de las piñas y los girasoles, en les fueyes de un felechu...

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...



3. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Consideremos las siguientes sucesiones: 2, 5, 8, 11, 14, …; 6, 2, –2, –6, –10, …; –3, –1, 1, 3, 5, …

Observa que, en todas ellas, cada término se obtiene a partir del anterior sumando o restando un número fijo; estas sucesiones se llaman *progresiones aritméticas*.

> Una ***progresión aritmética*** es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene a partir del anterior sumándole un número fijo, llamado ***diferencia,*** y que representamos por ***d*:**
>
> $$\boldsymbol{a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d,\ a_4 = a_3 + d,\ \ldots,\ a_n = a_{n-1} + d}$$

3.1. Término general

Podemos hallar fácilmente el término general de estas sucesiones en función de los términos que tengamos:

- Conocidos el primer término $\boldsymbol{a_1}$ y la diferencia $\boldsymbol{d}$.

  Consideremos la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ de diferencia d, y expresemos todos los términos en función de a_1 y de d. Teniendo en cuenta la definición de progresión aritmética, se obtiene:

  $$a_2 = a_1 + d$$
  $$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
  $$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
  $$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$$
  $$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
  $$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d$$

  Por tanto, la expresión del término general de una progresión aritmética es: $\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}}$

- Conocidos el término k-ésimo $\boldsymbol{a_k}$ y la diferencia $\boldsymbol{d}$.

  De forma análoga, obtenemos que si $\boldsymbol{k < n}$, entonces: $\boxed{\boldsymbol{a_n = a_k + (n-k)d}}$

Ejemplo.- Halla el término general de la progresión aritmética 2, 5, 8, 11, 14, …

$a_1 = 2,\ d = 3 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)\cdot 3 = 2 + 3n - 3 \Rightarrow a_n = 3n - 1$

Ejemplo.- Halla el término general de una progresión aritmética sabiendo que $a_{11} = 35$ y $d = 4$.

1er método:

$a_{11} = 35,\ d = 4 \Rightarrow a_n = a_{11} + (n-11)d = 35 + (n-11)\cdot 4 = 35 + 4n - 44 \Rightarrow a_n = 4n - 9$

2º método:

Calculemos previamente el primer término a_1:

$a_{11} = a_1 + (11-1)\cdot d \Rightarrow 35 = a_1 + (11-1)\cdot 4 \Rightarrow 35 = a_1 + 10\cdot 4 = a_1 + 40 \Rightarrow a_1 = 35 - 40 = -5$

Así, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow a_n = -5 + (n-1)\cdot 4 = -5 + 4n - 4 \Rightarrow a_n = 4n - 9$

Ejemplo.- Halla el primer término y la diferencia de una progresión aritmética sabiendo que $a_5 = -1/2$ y $a_{13} = 7/2$.

Para $n = 13$ y $k = 5$, obtenemos: $a_{13} = a_5 + (13-5)d \Rightarrow \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} + 8d \Rightarrow 4 = 8d \Rightarrow d = \frac{1}{2}$

Para $n = 5$ tenemos: $a_5 = a_1 + (5-1)d \Rightarrow -\frac{1}{2} = a_1 + 4\cdot\frac{1}{2} = a_1 + 2 \Rightarrow a_1 = -\frac{5}{2}$

3.2. Interpolación de medios aritméticos

Interpolar n medios aritméticos entre dos números conocidos ***a*** y ***b*** consiste en construir una progresión aritmética de la forma $\boldsymbol{a, m_1, m_2, \ldots, m_n, b}$. Los números $m_1, m_2, \ldots, m_n$, se llaman ***medios aritméticos.***

Para resolver este problema basta conocer la diferencia que ha de tener la progresión, la cual se deduce sin más que tener en cuenta dos cosas:

- La sucesión tiene $n + 2$ términos.
- El primer término a_1 es a y el término a_{n+2} es b: $a_1 = a$, $a_{n+2} = b$.

Ejemplo.- Interpolar cinco medios aritméticos entre 4 y 22.

Debemos completar los espacios punteados para que la sucesión 4, …, …, …, …, …, 22 sea una progresión aritmética.

El número de términos es $n + 2 = 5 + 2 = 7$, y con la expresión del término general $a_n = a_1 + (n - 1)d$ hallamos la diferencia:

$$a_7 = a_1 + (7 - 1)d \Rightarrow 22 = 4 + 6d \Rightarrow 22 - 4 = 6d \Rightarrow 18 = 6d \Rightarrow d = 3$$

La progresión aritmética es, por tanto: 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22.

EJERCICIOS

3. Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y, en caso afirmativo, halla su término general.
   a) 20, 17, 14, 11, 8, … b) −9, −2, 5, 12, 19, … c) 4, 8, 16, 32, 64, … d) 4/3, 5/3, 2, 7/3, 8/3, …
4. El quinto término de una progresión aritmética es 22 y la diferencia 5. Halla el término general.
5. En una progresión aritmética conocemos los términos $a_1 = 9$ y $a_{60} = 422$. Halla su término general.
6. Halla el primer término y la diferencia de una progresión aritmética en la que el tercer término es 24 y el décimo 66.
7. Halla el término general de una progresión aritmética de la cual se conocen los términos $a_5 = 1$ y $a_{83} = -38$.
8. Los seis ángulos de un hexágono están en progresión aritmética. La diferencia entre el mayor y el menor es 60º. Calcula el valor de cada ángulo.
9. Halla la medida de los tres lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son términos consecutivos de una progresión aritmética de diferencia 3.
10. ¿Cuántos números de cuatro cifras son múltiplos de 3?
11. a) Interpola tres medios aritméticos entre 3 y −13.
    b) Interpola tres medios aritméticos entre 2 y 3.
    c) Interpola cuatro medios aritméticos entre 12 y 1.

3.3. Suma de términos consecutivos

- En ocasiones nos referiremos a la progresión formada por los n primeros términos, tratándose en estos casos de una progresión ***limitada.*** Consideremos la progresión aritmética limitada formada por los siete primeros múltiplos de 5:

$a_1 = 5$ $a_2 = 10$ $a_3 = 15$ $a_4 = 20$ $a_5 = 25$ $a_6 = 30$ $a_7 = 35$

$$20 + 20 = 40$$
$$15 + 25 = 40$$
$$10 + 30 = 40$$
$$5 + 35 = 40$$

Podemos observar que la suma de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos, es decir, es $a_1 + a_7 = a_2 + a_6 = a_3 + a_5 = a_4 + a_4 = 40$.

En general, dada una progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ de diferencia d, se tiene que:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$a_{h+1} + a_{n-h} = (a_1 + hd) + (a_n - hd) = a_1 + a_n$$

En toda progresión aritmética limitada, $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n}$, la suma de los términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos:

$$\boldsymbol{a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \ldots}$$

- Denotemos por S_7 la suma de los siete primeros términos de la progresión anterior: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35.

Una forma de hallarla es mediante el procedimiento inventado por el matemático Carl Frederich Gauss (1777-1855) a la edad de 10 años, consistente en escribir la suma dos veces, invirtiendo los términos en una de ellas:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} S_7 & = & 5 & + & 10 & + & 15 & + & 20 & + & 25 & + & 30 & + & 35 \\ S_7 & = & 35 & + & 30 & + & 25 & + & 20 & + & 15 & + & 10 & + & 5 \\ \hline 2S_7 & = & 40 & + & 40 & + & 40 & + & 40 & + & 40 & + & 40 & + & 40 \end{array}$$

de donde: $2S_7 = 7 \cdot 40 = 7 \cdot (5 + 35) \Rightarrow S_7 = \dfrac{7 \cdot (5+35)}{2} = 140$

Siguiendo el procedimiento utilizado por Gauss, podemos hallar la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$.

$$\begin{array}{rcccccccccc} S_n & = & a_1 & + & a_2 & + & \ldots & + & a_{n-1} & + & a_n \\ S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + & \ldots & + & a_2 & + & a_1 \\ \hline 2S_n & = & (a_1 + a_n) & + & (a_2 + a_{n-1}) & + & \ldots & + & (a_{n-1} + a_2) & + & (a_n + a_1) \end{array}$$

Como hay n paréntesis y el valor de cada uno es $(a_1 + a_n)$, se tiene:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = n \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

La suma de los $\boldsymbol{n}$ primeros términos de una progresión aritmética, $\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$, vale:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

Ejemplo.- Calcula la suma de los 500 primeros números pares.

La sucesión de números pares 2, 4, 6, 8, 10, … es una progresión aritmética donde $a_1 = 2$ y $d = 2$.

El término 500 de esta progresión es $a_{500} = a_1 + (500 - 1)d = 2 + 499 \cdot 2 = 1.000$

Por tanto, la suma de los 500 primeros números pares vale:

$$S_{500} = \frac{500(a_1 + a_{500})}{2} = \frac{500(2 + 1.000)}{2} = 250 \cdot 1.002 = 250.500$$

EJERCICIOS

12. Calcula la suma de los números que se indican.
    a) De los 25 primeros términos de la sucesión 3, 8, 13, …
    b) De los 40 primeros términos de la sucesión 1/2, 5/8, 3/4, …
    c) De todos los números pares de dos cifras.
    d) De todos los números que, teniendo tres cifras, son múltiplos de 6.
13. ¿Cuántos términos de la progresión aritmética −11, −4, 3, 10, … hay que sumar para obtener como resultado 570?
14. Halla la expresión de la suma de los n primeros números impares. A partir de esta expresión, calcula la suma de los 125 primeros números impares.
15. Fernando estuvo perfeccionando su inglés el verano pasado en Londres. ¿Cuánto dinero llevó si el primer día gastó 270 euros, fue disminuyendo gastos en 9 euros diarios, y el dinero le duró 30 días?
16. Un individuo ha ahorrado durante un año 4.212 euros, ingresando cada mes 42 euros más que el anterior. ¿Cuánto dinero ahorró el primer mes? ¿Cuánto dinero ingresó el último mes?
17. Las cinco cifras que forman un número están colocadas en progresión aritmética. La suma de todas ellas es igual a 25, y la segunda (decenas) es doble de la quinta (decenas de millar). ¿Qué número es este?

4. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Consideremos las siguientes sucesiones: 2, 6, 18, 54, 162, …; 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, …; 3, −3, 3, −3, 3, −3, …

Observa que, en todas ellas, cada término se obtiene a partir del anterior multiplicando o dividiendo por un número fijo; estas sucesiones se llaman *progresiones geométricas*.

Una ***progresión geométrica*** es una sucesión de números reales en la que cada término se obtiene a partir del anterior multiplicándolo por un número fijo, llamado ***razón,*** y que representamos por ***r*:**

$$\boldsymbol{a_2 = a_1 \cdot r,\ \ a_3 = a_2 \cdot r,\ \ a_4 = a_3 \cdot r,\ \ \ldots,\ \ a_n = a_{n-1} \cdot r}$$

Término general

Al igual que en el caso de las progresiones aritméticas, podemos deducir una expresión que nos proporciones el término general.

- Conocidos el primer término $\boldsymbol{a_1}$ y la razón ***r*.**

  Consideremos la progresión geométrica a_1, a_2, a_3, a_4, …, a_n, … de razón r, y expresemos todos los términos en función de a_1 y de r. Teniendo en cuenta la definición de progresión geométrica, se obtiene:

$$a_2 = a_1 \cdot r$$
$$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$
$$a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^4$$
$$\ldots \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Por tanto, la expresión del término general de una progresión geométrica es: $\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}}$

Ejemplo.- Halla el término general de la progresión geométrica $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, …

$a_1 = 1/3,\ r = 3 \Rightarrow a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_n = 3^{n-2}$

Ejemplo.- Halla el término general de una progresión geométrica sabiendo que $a_{15} = 162$ y $r = 3$.

Calculemos previamente el primer término a_1: $a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} \Rightarrow 162 = a_1 \cdot 3^4 = a_1 \cdot 81 \Rightarrow a_1 = 2$

Así, $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

EJERCICIOS

18. Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, halla su término general.
a) 2, 6, 18, 54, … b) 5, –5, 5, –5, 5, … c) 10, 20, 28, 36, 44, … d) 18, 6, 2, 2/3, 2/9, …

19. El sexto término de una progresión geométrica de razón 2 es 96. Calcula el término general.

Soluciones a los ejercicios propuestos

1. Escribe los términos primero, segundo, tercero, décimo y vigésimo de las sucesiones dadas por los términos generales siguientes.

   a) $a_n = -3n + 5$ b) $b_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$ c) $c_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1}$

   a) $a_1 = 2$; $a_2 = -1$; $a_3 = -4$; $a_{10} = -25$; $a_{20} = -55$
   b) $b_1 = 3$; $b_2 = 5/3$; $b_3 = 7/5$; $b_{10} = 21/19$; $b_{20} = 41/39$
   c) $c_1 = -4$; $c_2 = 8$; $c_3 = -16$; $c_{10} = 2.048$; $c_{20} = 2.097.152$

2. Halla el término general de las siguientes sucesiones.

   a) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, … b) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, … c) 1, 8, 27, 64, 125, …

   d) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \ldots$ e) $4, \frac{9}{2}, \frac{16}{3}, \frac{25}{4}, \ldots$ f) $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \ldots$

   a) $a_n = 2n$ **b) $a_n = 2^{n-1}$** **c) $a_n = n^3$**

   d) $a_n = \dfrac{2^n}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ **e) $a_n = \dfrac{(n+1)^2}{n}$** **f) $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$**

3. Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y, en caso afirmativo, halla su término general.
   a) 20, 17, 14, 11, 8, … b) –9, –2, 5, 12, 19, … c) 4, 8, 16, 32, 64, … d) 4/3, 5/3, 2, 7/3, 8/3, …

   a) Sí, $a_n = -3n + 23$ **b) Sí, $a_n = 7n - 16$** **c) No es una prog. arit.** **d) Sí, $a_n = (n + 3)/3$**

4. El quinto término de una progresión aritmética es 22 y la diferencia 5. Halla el término general.
   $a_n = 5n - 3$

5. En una progresión aritmética conocemos los términos $a_1 = 9$ y $a_{60} = 422$. Halla su término general.
   $a_n = 7n + 2$

6. Halla el primer término y la diferencia de una progresión aritmética en la que el tercer término es 24 y el décimo 66.
   $a_1 = 12$; $d = 6$ (por tanto, $a_n = 6n + 6$)

7. Halla el término general de una progresión aritmética de la cual se conocen los términos $a_5 = 1$ y $a_{83} = -38$.
   $a_n = \dfrac{7 - n}{2}$

8. Los seis ángulos de un hexágono están en progresión aritmética. La diferencia entre el mayor y el menor es 60º. Calcula el valor de cada ángulo.
   Los ángulos tienen una amplitud de 90, 102, 114, 126, 138 y 150 grados, respectivamente.

9. Halla la medida de los tres lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son términos consecutivos de una progresión aritmética de diferencia 3.
   El triángulo tiene por lados 9, 12 y 15, respectivamente.

10. ¿Cuántos números de cuatro cifras son múltiplos de 3?
    3.000 números

11. a) Interpola tres medios aritméticos entre 3 y –13.
    b) Interpola tres medios aritméticos entre 2 y 3.
    c) Interpola cuatro medios aritméticos entre 12 y 1.
    a) 3, -1, -5, -9, -13 **b) 2, 9/4, 5/2, 11/4, 3** **c) 12, 49/5, 38/5, 27/5, 16/5, 1**

12. Calcula la suma de los números que se indican.
   a) De los 25 primeros términos de la sucesión 3, 8, 13, …
   b) De los 40 primeros términos de la sucesión 1/2, 5/8, 3/4, …
   c) De todos los números pares de dos cifras.
   d) De todos los números que, teniendo tres cifras, son múltiplos de 6.

   a) 1.575 **b) 235/2** **c) 2.430** **d) 82.350**

13. ¿Cuántos términos de la progresión aritmética –11, –4, 3, 10, … hay que sumar para obtener como resultado 570?
   105 términos.

14. Halla la expresión de la suma de los n primeros números impares. A partir de esta expresión, calcula la suma de los 125 primeros números impares.
   La suma de los n primeros números impares es $S_n = n^2$; en particular, $S_{125} = 125^2 = 15.625$

15. Fernando estuvo perfeccionando su inglés el verano pasado en Londres. ¿Cuánto dinero llevó si el primer día gastó 270 euros, fue disminuyendo gastos en 9 euros diarios, y el dinero le duró 30 días?
   Fernando llevó 4.185 euros.

16. Un individuo ha ahorrado durante un año 4.212 euros, ingresando cada mes 42 euros más que el anterior. ¿Cuánto dinero ahorró el primer mes? ¿Cuánto dinero ingresó el último mes?
   El primer mes ahorró 120 €, y el último mes ingresó 582 €.

17. Las cinco cifras que forman un número están colocadas en progresión aritmética. La suma de todas ellas es igual a 25, y la segunda (decenas) es doble de la quinta (decenas de millar). ¿Qué número es este?
   Se trata del número 34.567

18. Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, halla su término general.
   a) 2, 6, 18, 54, … b) 5, –5, 5, –5, 5, … c) 10, 20, 28, 36, 44, … d) 18, 6, 2, 2/3, 2/9, …
   a) Sí, $a_n = 2 \times 3^{n-1}$ **b) Sí, $a_n = 5 \times (-1)^{n-1}$** **c) No es una prog. geom.** **d) Sí, $a_n = 2 \times 3^{3-n}$**

19. El sexto término de una progresión geométrica de razón 2 es 96. Calcula el término general.
   $a_n = 3 \times 2^{n-1}$