

# HASTA EL INFINITO Y MAS ALLA

Habíamos dejado en nuestra última lámina a Cantor y Dedekind explorando el infinito. Nos habían contado la diferencia esencial entre un conjunto infinito y otro finito. En los conjuntos infinitos, el todo no siempre es mayor que sus partes. Son conjuntos tales que, por lo menos, contienen un subconjunto con tantos elementos como él mismo. Además nos enseñaron un procedimiento para saber si dos conjuntos infinitos son o no iguales. Resultados asombrosos que rompen nuestra intuición: por ejemplo, todos sabemos que la mitad de los números son pares, y la otra mitad impares... Sin embargo, siendo infinitos son tan numerosos como todos los números juntos, pares e impares. Prepárate porque esto no ha hecho sino empezar. Abróchate el cinturón y sumérgete en el infinito...

por Lolita Brain

Al renombrado HOTEL ALEF CERO, de NÚMEROLAND, llegaron para asistir a un congreso todos los habitantes de la ciudad SEGMENTO UNITARIO, los señores PUNTO. Pequeñísimos habitantes del segmento de longitud 1, el que va desde la marca 0 hasta la marca 1 de una regla. Eran unos respetables ciudadanos que se jactaban de existir casi desde siempre, aunque solían referirse a Euclides como el gran fundador de la cultura del segmento. Y por supuesto, eran infinitos. Eran tan numerosos, sociables y vivían tan unidos que les llamaban el CONTINUO.

El gerente del hotel, el señor ORDINAL,



ted que nuestro hotel dispone de infinitas habitaciones? ¡Exactamente ALEF CERO! -re-calcó.

- Sí, ya se... pero las cosas no son tan simples... ¡no sabe usted cuán numerosos son los habitantes de la ciudad de SEGMENTO UNITARIO! Pero si me permite le convenceré de lo que digo.

- Adelante, adelante... si así se queda usted satisfecho... le escucho.  
- Veamos -comenzó a decir Cantor con voz solemne y satisfecha- como usted bien sabe, cada habitante de la ciudad SEGMENTO UNITARIO tiene un número identificativo que se le asigna cuando nace y le diferencia de sus conciudadanos.

- Así es en efecto...  
- ...Y usted también sabrá que, con lo raros y disciplinados que son los señores PUNTO, todos sus códigos de identificación siguen el mismo patrón, son de la forma  $0,d_1d_2d_3d_4...$  ya sabe, decimales del tipo "cero y coma" y una lista sin fin de decimales.

- Sí, ya se, ellos le llaman su Nombre Decimal.

- Pues bien, usted dice que puede alojarlos a todos ¿no es así?

- ¡En efecto!  
- Bien, imaginemos que usted tiene razón y que ya tiene alojado a cada señor PUNTO en su habitación correspondiente...

- ¡Ve cómo al final me da la razón!, replicó entusiasmado el Sr. ORDINAL.  
- ¡No tan deprisa!.. Sólo he dicho imaginemos...

En realidad le voy a demostrar que eso no es posible. Estará conmigo en que, si encuentro el Número Decimal de algún señor Punto que no



dispuso que se habilitara una habitación para cada uno de los señores PUNTO que iban a llegar. El señor ORDINAL estaba muy orgulloso de regentar un hotel con infinitas habitaciones. Aún recordaba cuando alojó a todos los señores ENTEROS, y más sonada fue la ocasión en la que, ante el estupor de todos, consiguió hospedar a todos los RACIONALES, aristócratas de NÚMEROLAND.

El joven y osado botones del hotel, de nombre CANTOR, se acercó al Sr. ORDINAL y le espetó:

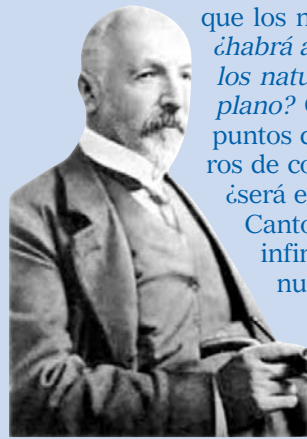
- Disculpe Sr. ORDINAL, pero creo que no va a ser posible alojar a todos los señores PUNTO...

- ¡Cómo que no! se apresuró a atacar el Sr. ORDINAL. ¿Acaso no sabe us-



## LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO

Probablemente el más grande de los hallazgos de Cantor fue que los infinitos no son únicos. Los números reales eran más numerosos que los naturales, y a Cantor le asaltó la pregunta de si *¿habrá algún conjunto que teniendo más elementos que los naturales, sea menos numeroso que los puntos del plano?* O dicho de otro modo, *¿será el infinito de los puntos de una recta el siguiente infinito al de los números de contar, o habrá entre ellos otro número infinito?*, ¿será el CONTINUO el siguiente número a ALEF CERO?



Cantor pensó que así era, que tras el menor de los infinitos que conocemos -ALEF CERO- venía el continuo, por lo que decidió llamarlo también ALEF UNO. Pero esto era sólo una hipótesis. Ni Cantor, ni nadie tras él, ha conseguido probar que las cosas sean así. Ni tampoco se ha probado lo contrario. La conjetura de Cantor se denomina "HIPÓTESIS DEL CONTINUO".



puede estar hospedado en ninguna habitación... me dará la razón.

- ¡Por supuesto! Pero estoy seguro de que no podrá probarme eso.

- ¿Podría traer la lista de las habitaciones, para saber qué PUNTO está alojado en cada habitación?

- Aquí la tengo.

- Dígame el DNI del señor PUNTO alojado en la habitación 1.

- Sí, déjeme mirar... es el 0.468211532....

- Vale, vale. Su primer dígito decimal es el 4. Dígame un número distinto del 4, por favor.

El Sr. ORDINAL le dijo el 6 y Cantor anotó en su libreta 0.6.

- Ahora déme el DNI del huésped de la habitación 2.

- Es el 0.1563315...

- Su segundo dígito es el 5, Sr. ORDINAL. Escoja un número distinto de 5.

- El 4 por ejemplo.

Y Cantor anotó ahora 0.64.

- Ahora vayamos a la habitación nº 3.

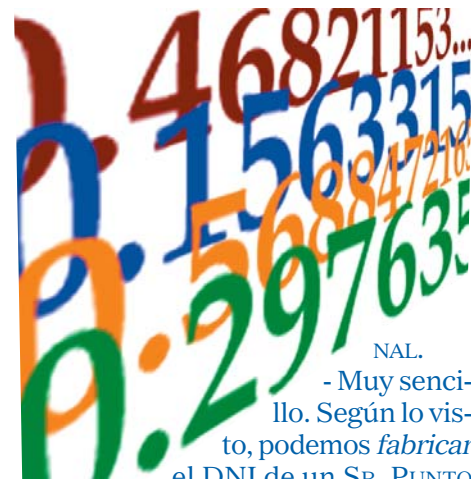
- Sí, ya se... Ahí se ha alojado el Sr. PUNTO con número decimal 0.56847216... Y su tercera cifra es el 8, que usted quiere que la cambie, por ejemplo por el 2...

- En efecto. Veo que entiende por dónde voy -decía Cantor mientras anotaba 0.642...

Estará usted conmigo que este procedimiento podemos realizarlo habitación tras habitación.

Y en cada una de ellas cambiaremos en el DNI del correspondiente Sr. PUNTO, el decimal que ocupa la misma posición que el número de la habitación en la que se encuentra... Pues ya he terminado.

-¿Cómo que ya ha terminado? ¿Qué tiene esto que ver con mis huéspedes? -preguntó irritado el Sr. ORDINAL.



NAL.

- Muy sencillo. Según lo visto, podemos fabricar el DNI de un Sr. PUNTO

0.642... que no está en la habitación nº1 porque su primer decimal es distinto del huésped allí instalado. Tampoco puede ser el del Sr. PUNTO que ocupa la habitación nº 2 porque son distintos en el segundo decimal, ni puede ser el Sr. de la habitación nº 3, ni el de la 4 por la misma razón, ni el de... ¡ninguna! El Sr. PUNTO identificado con el 0.642... que fabricamos, no es ninguno de los huéspedes que usted tiene alojados, y en cambio, es ciertamente un Sr. PUNTO de la ciudad del SEGMENTO UNITARIO. Por lo tanto HAY MÁS SEÑORES PUNTO QUE HABITACIONES TIENE SU HOTEL.

- De modo que...

- Sí, de modo, Sr. ORDINAL, que por muy infinito que sea el número de habitaciones de su hotel, deberá en-

viar un fax urgente al SEGMENTO UNITARIO para lamentar la imposibilidad de acomodarles a todos...

- En mis ALEF-CERO habitaciones ¿por lo menos a la mitad? ¿podría alojar a la mitad de los SRS. PUNTO?

- Imposible. Ni con dos, ni con tres hoteles iguales podría alojar a los habitantes de SEGMENTO UNITARIO... de tantos como son...

- ¡Increíble! Y pensar en lo pequeña que es su ciudad, apenas un centímetro de una recta.

0.6421153...  
0.1563315...  
0.56847216...  
0.290...

0.6421153...  
0.1563315...  
0.56847216...  
0.290...

0.6421153...  
0.1563315...  
0.56847216...  
0.290...

0.6421153...  
0.1563315...  
0.56847216...  
0.290...

0.6421153...  
0.1563315...  
0.56847216...  
0.290...

0.6421153...  
0.1563315...  
0.56847216...  
0.290...

0.6421153...  
0.1563315...  
0.56847216...  
0.290...

0.6421153...  
0.1563315...  
0.56847216...  
0.290...

0.6421153...  
0.1563315...  
0.56847216...  
0.290...

0.6421153...  
0.1563315...  
0.56847216...  
0.290...

lolitabrain@hotmail.com