Jvh

1. Matemáticas financieras. Introducción

Quien presta dinero, o lo deposita en una entidad financiera (banco, caja de ahorros, etc) exige normalmente que se lo devuelvan en un plazo determinado y le abonen, además, una cantidad adicional, que suele depender del importe depositado o prestado y del tiempo que ha permanecido en manos ajenas.

Conviene conocer, al respecto, las siguientes **definiciones**:

C_i : **Capital inicial** (dinero de partida que se depositó o se invirtió, o que se pidió prestado)

C_f : **Capital final** (dinero, que al final del periodo, se posee o que se ha tenido que devolver)

r : **rédito** -por cuota- (lo que produce 1€ -o la moneda del país- en el periodo de tiempo que marca el problema, normalmente un año. En los enunciados suele aparecer en %. En las fórmulas hay que expresarlo en tanto por uno).

I : **Intereses** (cantidad adicional que se obtiene por un depósito o inversión o que hay que pagar por un préstamo. Se considerarán positivos –en el haber- si son de una inversión en la que se ganó dinero, y negativos –en el debe- si se perdió dinero o se devolvió un préstamo).

t : **tiempo** o periodo (plazo de tiempo de un depósito, o de una inversión, o de una capitalización o de un préstamo, medido en la unidad que marque el problema).

NOTAS:

- No confundir este periodo t con el periodo de las cuotas. Este último periodo (el de las cuotas) es que se suele usar como *unidad de medida del tiempo* del problema.
- En la práctica, como el rédito suele expresarse mediante porcentajes, es también corriente denominarlo "interés", lo que puede provocar confusión con el "verdadero" interés, o sea, con la cantidad total abonada/pagada; para evitar problemas, a este último lo llamaremos "los intereses".

2. Interés simple

En préstamos o depósitos de dinero "a corto plazo" (hasta unos dos años), los intereses suelen "pagarse de una vez" de acuerdo con el número de meses o días transcurridos, y no se acumulan al capital. A esos efectos, se considera que el año tiene doce meses de treinta días cada uno, para facilitar los cálculos. El **interés se denomina simple** y las fórmulas que se usan son:

$I = C_i \cdot r \cdot t$	$C_f = C_i + I = C_i \cdot (1 + r \cdot t)$

Ejercicios.

- Justifica la fórmula del interés simple.
- Despeja, de la última fórmula, bien C_i, bien r o bien t.
- Si el 1 de abril me prestan 3000€ a un interés anual, simple, del 8%, y los devuelvo el 15 de julio, han transcurrido 105 días (¡los meses se cuentan como de 30 días, y el año financiero tiene 360 días!). ¿Cuánto debo devolver en total?

(Sol. C_f = 3070 €)

3. Interés compuesto

A medio y largo plazo (más de 3 años), los intereses, que se pueden abonar al cabo de periodos más cortos (diariamente, mensualmente, trimestralmente, semestralmente, ...), se añaden al capital, en decir, nos dejan incorporarlos también a la cuenta. En definitiva, los intereses se van acumulando al capital inicial y pasan, así, a producir más intereses. Decimos, entonces, que el **interés que se aplica es compuesto** y las fórmulas que se usan son:

$C_f = C_i \cdot (1 + r)^t$	$I = C_f - C_i$

Ejercicios, ejemplos y notas.

- NOTA: las fórmulas del interés compuesto se pueden usar para cualquier fenómeno en el que se encadene una misma variación porcentual a lo largo de un periodo (p.e. una variación media para acciones, o fondos de inversión, o población o IPC o …). Ver ejercicios 9 y 11.
- Justifica la fórmula del interés compuesto (pista: término general de una progresión geométrica).
- Despeja –si puedes-, de la primera fórmula, bien C_i, bien r o bien t.
- Si depositamos 60000 € en un Banco, a un interés anual, compuesto, del 2%, al cabo del año tendremos 60000·1'02 = 61200 €. Al dejar ese dinero en la cuenta, el segundo año volverá a darnos un 2%, convirtiéndose en 61200·1'02 = 62424 €. ¿Cuál será el capital final al cabo de 10 años? ¿Qué intereses habremos obtenido?

  (Sol. C_f = 73139'67 € I = 13139'67 €)
- Halla el capital final en que se convierten 36000 €, invertidos durante 30 años, a un interés anual del 2%, bien sea a interés simple o bien sea a interés compuesto.

  (Sol. C_f = 57600 € C_f = 65209'02 €)

4. Logaritmos

- Concepto y aplicaciones (se detallará en clase)

  Problema: ¿cuánto tiempo hemos tenido invertido un capital inicial de 6000€ para que al cabo de ese tiempo el capital final sea 7000€ si nos dieron un 2% anual?

  (tantear solución con calculadora)

  Trabajar con potencias de 10 ➔ logaritmos decimales

  Aplicaciones de los logaritmos
- Definiciones

  Se llama ***logaritmo*** en base ***a*** de ***x*** (***a*** > 0 ***a*** ≠ *1*), y se designa $\log_a x$, al **exponente** ***z*** al que hay que elevar la base ***a*** para obtener ***x***; es decir:

$$\text{Log}_a\, x = z \quad \Leftrightarrow \quad a^z = x \qquad \begin{cases} a: base & (a>0 \quad a\neq 1) \\ x: argumento & (\text{potencia}) \\ z: logaritmo \end{cases}$$

- Propiedades
  - Básicas

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad \log_a a^x = x$$

- Relacionadas con las operaciones

$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$	logaritmo del producto
$\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$	logaritmo del cociente
$\log_a(x^n)=n\cdot\log_a x$	logaritmo de la potencia

- Cambio de base

No se dará ninguna de las fórmulas que hay. Simplemente, se pasará la expresión a forma potencial, se tomarán logaritmos en la nueva base y se simplificarán los resultados. Veamos unos ejemplos:

$$\log_3 99=z \;\Rightarrow\; 3^z=99 \;\Rightarrow\; \log 3^z=\log 99 \;\Rightarrow\; z\cdot\log 3=\log 99 \;\Rightarrow\; z=\log_3 99=\frac{\log 99}{\log 3}=4'18\ldots$$

$$\log_{0'5} 16=z \;\Rightarrow\; 0'5^z=16 \;\Rightarrow\; \log 0'5^z=\log 16 \;\Rightarrow\; z\cdot\log 0'5=\log 16 \;\Rightarrow\; z=\log_{0'5} 16=\frac{\log 16}{\log 0'5}=-4$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Compara el interés simple con el interés compuesto en cuanto a la periodicidad de las cuotas o pagos. Toma, p.e. un C_i = 1000 € y réditos del 3% anual, 1'5% semestral, 0'75% trimestral y 0'25% mensual. Comprueba que, en el caso del interés compuesto, a plazo más corto le corresponde más intereses.

2. Me prestan 3200 € a un 12% de interés simple y devuelvo 3398'40 € ¿Cuánto ha durado el préstamo? (Sol. 186 días)

3. Para saldar una deuda, a los 240 días de haberla contraído, debo abonar, en concepto de capital e intereses, 5072 €. Si me prestaron 4800 € ¿a qué tanto por ciento de interés simple contraje esa deuda? (Sol. 8,5 %)

4. Si se impone la mitad de un capital a interés simple de 10% y la otra mitad a interés compuesto del mismo rédito anual, ¿cuál de las dos mitades producirá más en ***n*** años y por qué? (Sol. la 2ª). Pista: tomar, p.e., C_i = 1 € r = 0'01% y representar, con GeoGebra, las funciones del C_f respecto del tiempo t

5. Halla en cuánto se transforma un capital de 5 000 € depositado durante 6 meses al 3% anual de interés compuesto, si los períodos de capitalización son mensuales. (Sol. C_f = 5075,47 €)

6. Halla el tanto por ciento anual de interés compuesto al que debe colocarse un capital de 300 000 euros para que en dos años se transforme en 330 750 euros. (Sol. r = 5 % anual)

7. Averigua cuál es el capital que colocamos al 2'5% anual durante 5 años (largo plazo → interés compuesto), sabiendo que al final teníamos 22628,16 €. (Sol. C_i = 20000 €)

8. ¿Cuántos años tarda en multiplicarse por 10 un capital C al 10% de interés compuesto? (Resuélvelo por tanteo, con una calculadora). Nota: desde 1991 a 2014 la rentabilidad media acumulada de la bolsa española fue, precisamente, del 10% (Sol. Unos 24'16 años)

9. En los años 1960 y 1980, España tenía 30.525.000 y 38.000.000 habitantes, respectivamente.
   - Suponiendo que la variación de la población se rige por la fórmula del interés compuesto y que el tanto por ciento de incremento de la población se mantiene constante ¿cuál debería haber sido la población española en el 2000?
   - Sabiendo que la población española en el 2000 es de 40 millones ¿cuál ha sido el % de incremento anual de 1980 a 2000?

   (Sol. 47,3 millones; 0,2568% anual)

10. ¿En cuanto tiempo se duplicará un capital invertido a un 5% de interés: a) simple? b) compuesto?

    (Sol. a) 20 años b) 14'21 años)

11. Un árbol crece anualmente la décima parte de la altura que tenía a principio de ese mismo año. Si al comenzar este año medía 8 m, ¿cuál será su altura dentro de 10 años?

(Sol. 20,75 m)

12. Calcula, basándote en la definición de logaritmo:

a) $\log_3 81$ b) $\log_3 \frac{1}{9}$ c) $\log_2 \sqrt[4]{2^5}$

d) $\log 0{,}001$ e) $\log \sqrt{0{,}001}$ f) $\log \sqrt{\frac{1}{10}}$

(Sol. 4, -2, 5/4, -3, -3/2, -1/2)

13. Halla el valor de x en cada caso, utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_3 x = 2$ b) $\log_x 2 = 1$ c) $\log_3 {}^1\!/_{81}$

d) $\log x = 3$ e) $\log_4 x = 0$ f) $\log_x 9 = 2$

(Sol. 9, 2, -4, 1000, 1, 3)

14. Determina los siguientes logaritmos con ayuda de la calculadora y usando un cambio de base. Aproxima el resultado redondeando a las milésimas:

a) $\log_2 3$ b) $\log_2 35$ c) $\log_3 \sqrt{5}$

d) $\log_2 10$ e) $3\log_5 \frac{7}{3}$

15. Usando las propiedades de los logaritmos “expande” las siguientes expresiones:

a) $\log \frac{A^2 B}{C^3}$ b) $\log \sqrt[3]{\frac{A^2}{100B}}$ c) $\log \sqrt{\frac{A \cdot B}{C}}$

d) $\log\left(0{,}1 A^2 B^3\right)$ e) $\log \frac{\sqrt[3]{A^2 B}}{10C}$

16. Expresa como “un solo logaritmo” cada una de las siguientes expresiones:

a) $2\log_2 A - 3\log_2 B$ b) $\frac{1}{2}\log A - \frac{\log B}{3} + 2\log C$

c) $\frac{3}{4}\log A - \frac{2}{5}\log B$ d) $\log 3 + \log A - 5\log C$

17. ¿Cuántos años tarda en multiplicarse por 5 un capital C al 8% de interés compuesto? Nota: desde 1991 a 2014 la rentabilidad media acumulada de la bolsa española fue todavía mayor: el 10%. Resuélvelo usando logaritmos. (Sol. Unos 20,91 años)